

Über die Kompression einer Plasmasäule im magnetischen Vierpolfeld

VON JENS CHRISTIANSEN*

Aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Braunschweig
(Z. Naturforsch. 13 a, 951—961 [1958]; eingegangen am 31. März 1958)

Es werden die Bedingungen untersucht, unter denen die geladenen Teilchen eines Plasmas längs der Zentralachse eines statischen magnetischen Vierpolfeldes komprimiert werden. Die sich bei Hochfrequenzregung des Plasmas ergebenden Ionenbahnen werden teilweise ermittelt und die sich im stationären Gleichgewichtszustand einstellende Dichteverteilung der Ionen näherungsweise angegeben. Es ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen dem gut messbaren charakteristischen Durchmesser der Plasmasäule, der Temperatur des Gases im Zentralbereich und der magnetischen Kraftflußdichte an der Oberfläche der Vierpolmagneten. Die Ergebnisse werden im wesentlichen durch experimentelle Untersuchungen an schwach ionisierten Gasen, deren Veröffentlichung vorbereitet wird, bestätigt¹.

Erzeugt man in einem zylindrischen Glasrohr durch induktive Energiefuhr eine Hochfrequenzentladung ($V_{HF} = 50 - 100$ MHz) und bringt die gesamte Anordnung in den Zentralbereich eines magnetischen Vierpolfeldes, so erhält man, verglichen mit der Entladung ohne Feld, eine starke Erhöhung der Leuchtintensität der Gasentladung im Zentralbereich.

Abb. 1 zeigt eine Skizze der Anordnung,

Abb. 2 eine Aufnahme der Gasentladung, wobei die Zylinderachse des Glasrohrs parallel zur Zentralachse des Vierpolfeldes steht, und die Beobachtung durch eine planparallele Glasplatte, die das Rohr abschließt, erfolgt.

Die Konfiguration der Plasmasäule zeigt keine Abhängigkeit von der z -Koordinate des Feldes. Die hohe Leuchtintensität um den sternförmigen Bereich um den Mittelpunkt $x = y = 0$ herum lässt auf eine hohe Ladungsträgerkonzentration in diesem Bereich schließen, da für die Lichtentstehung neben thermischen Effekten Anregung des Gases durch Elektronenstoß und Rekombination der Ladungsträger vorherrschend sein dürfte. Bemerkenswert an der Erscheinung ist die Tatsache, daß offenbar längs der Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ eine schwächere, entlang der Diagonalebenen $|x| = |y|$ maximale Kompression des Plasmas stattfindet.

Ziel dieser Arbeit ist es, der ausführlichen Beschreibung des Experimentes vorgreifend die Ursachen der Kompression aufzufinden und die Dichteverteilung der Ladungsträger zu ermitteln.

In einem geschlossenen statischen magnetischen Vierpolfeld nach Abb. 1 * ergibt sich der magnetische

Feldverlauf im Innenraum ohne Berücksichtigung des Feldanteiles der Ladungsträger durch Lösung der Differentialgleichung:

$$\Delta \psi = 0 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{H} = -\nabla \psi.$$

Wie sich zeigen lässt, wird der Feldverlauf für $|x| < d$, $|y| < d$, gut wiedergegeben durch die Randbedingungen eines Hyperbelfeldes:

$$\psi = \pm \psi_0 = \pm \text{const} \quad \text{für} \quad y^2 - x^2 = \pm d^2,$$

wenn die Querschnitte der Polshuhenden Kreise mit $R = d$ sind.

Damit ergibt sich für $|x| < d$, $|y| < d$:

$$\psi = \pm \psi_0 \frac{1}{d^2} (y^2 - x^2) \quad \text{und mit} \quad \frac{2 \psi_0}{d} = H^*, \quad (1)$$

$$\mathfrak{H} = \pm (\mathfrak{x}_0 x - \mathfrak{y}_0 y) \frac{H^*}{d}; \quad |\mathfrak{H}| = H = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{d} H^*.$$

Der Feldvektor ändert also im Innern des Polshuhbereichs seinen Betrag proportional zum Abstand von der Mittelgeraden $x = y = 0$, d. h.

$$\nabla H = \frac{H^*}{d} \frac{\mathfrak{x}_0 x + \mathfrak{y}_0 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{H^*}{d} \bar{\mathfrak{r}}_0, \quad (2)$$

wobei $\bar{\mathfrak{r}}_0$ = Radiusvektor in einer Ebene $z = \text{const}$ ist.

In den Diagonalebenen, also für $|x| = |y|$ erhält man ein mit $\bar{r} = \sqrt{x^2 + y^2}$ linear ansteigendes Magnetfeld, welches für $\bar{r} = 0$ verschwindet, und der Feldvektor \mathfrak{H} steht senkrecht auf dem Radiusvektor $\bar{\mathfrak{r}}_0 = (\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{y}_0) (1/\sqrt{2})$. Da gerade in diesem Winkelbereich nach Abb. 2 die Kompression des Plasmas am stärksten ist, erscheint zunächst die Berechnung dieses Falles sinnvoll. Wir wollen daher im folgenden das Verhalten von Ladungsträgern unter diesen Bedingungen berechnen. Zur Durchführung definieren wir einen unendlich ausgedehnten ξ , η , ζ -Raum mit: $\mathfrak{H} = \pm \vec{\xi}_0 (H^*/d) \eta = \vec{\xi}_0 H(\eta); \quad \xi, \eta, \zeta = \text{orthogonal}$

* Jetzt: Hamburg, Physikalisches Staatsinstitut.

¹ H. ALBERTI, J. CHRISTIANSEN u. U. WELLNER, in Vorbereitung.

* Abb. 1 bis 4 auf Tafel S. 954 a.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht:
Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

gonale Koordinaten; $\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0, \vec{\zeta}_0$ = Einheitsvektoren in den Koordinatenrichtungen. Das magnetische Feld in diesem Raum stimmt also mit dem Feldverlauf in den beiden Vierpoldiagonalebenen für $|\eta| < d$ und $\zeta = 0$ überein, wenn man setzt:

$$\eta_0 = (\xi_0 \pm \eta_0) (1/\sqrt{2}), \quad \vec{\xi}_0 = \hat{z}_0$$

$$\text{und} \quad \vec{\zeta}_0 = (\xi_0 \mp \eta_0) (1/\sqrt{2})$$

setzt.

I. Der Bahnverlauf eines geladenen Teilchens im inhomogenen Feld

Bevor das makroskopische Verhalten eines Plasmas in unserem idealisierten Vierpoldiagonalfeld untersucht wird, ist es notwendig, den Bahnverlauf einzelner geladener Teilchen in einem solchen Feld zu ermitteln. Erschwerend ist dabei die Tatsache, daß die Teilchenbahnen gerade im Bereich des Null-durchgangs von \mathfrak{H} , also für $\eta \approx 0$ von Interesse sind, denn dieser Bereich entspricht ja dem Zentrum des Vierpolfeldes, in welchem die höchste Ladungsträgerkonzentration beobachtet wird. Näherungs-lösungen der Bahngleichung, die im wesentlichen auf ALFVÉN² zurückgehen, sind jedoch nur gültig für den Fall $\varrho |\text{grad } H| \ll H$, so daß eine unserem Falle angepaßte Integration der Bewegungsgleichung notwendig wird.

Setzen wir ein Teilchen der Masse m der Ladung e mit einer Geschwindigkeit v in unser ξ, η, ζ -Gebiet, so wirkt die LORENTZ-Kraft,

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{e}{c} [v \mathfrak{H}]. \quad (3)$$

Hierbei wurde $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ gesetzt, d. h. es sollen irgendwelche Magnetfelder anderer geladener Teilchen im Feld unberücksichtigt bleiben. Im folgenden soll auch angenommen werden, daß v keine Komponente in ζ -Richtung enthält. Wir interessieren uns also nur für die Projektionen der allgemeinen spiralähnlichen Teilchenbahnen auf die ξ, η -Ebene.

Aus Gl. (3) folgt dann das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} m \ddot{\xi} &= \frac{e}{c} \dot{\eta} H(\eta), \\ m \ddot{\eta} &= -\frac{e}{c} \dot{\xi} H(\eta). \end{aligned} \quad (4)$$

² H. ALFVÉN, Cosmical Electrodynamics, Clarendon Press, Oxford 1950.

* Bricht man die TAYLOR-Reihe Gl. (5) erst nach dem n -ten Gliede ab, so liefert die Integration ersichtlich anstatt Gl. (7) ein Polynom n -ten Grades, von dem eine Wurzel mit $\varphi = 0$ für $\eta = \eta_0$ zu bestimmen ist.

Die Lösung läßt sich durchführen nach Einführung von Bahnkoordinaten ϱ, φ als Hilfskoordinaten, wobei ϱ der Krümmungsradius der Teilchenbahn, und φ die Gyrationssphase, d. h. der Winkel der Verbindung Krümmungsmittelpunkt-Teilchenort gegen die ξ -Richtung bedeutet. Die η -Koordinate des Teilchens für $\varphi = 0$ wollen wir η_0 , den dazugehörigen Krümmungsradius ϱ_0 nennen, die magnetische Feldstärke für $\eta = \eta_0$ sei H_0 und der Feldgradient sei $\vec{\eta}_0 (dH/d\eta)|_{\eta_0} = \vec{\eta}_0 |\text{grad } H|_0$. Ferner wollen wir einen fiktiven Punkt, der sich mit t gleichmäßig auf der Geraden $\eta = \eta_0$ bewegen möge, derart, daß er sich für $\varphi = 0, 2\pi$ usw. mit dem Krümmungsmittelpunkt der Teilchenbahn deckt, in Erweiterung einer ähnlichen Definition von ALFVÉN das Führungszentrum (guiding center) der Teilchenbahn nennen.

Es werde jetzt $H(\eta)$ durch eine TAYLOR-Entwicklung um den Punkt (ξ, η_0, ζ) dargestellt, dann gilt für jedes ξ, ζ :

$$H(\eta) = H_0 + (\eta - \eta_0) |\text{grad } H|_0 \quad (5)$$

(in unserem Falle gilt exakt $d^2H/d\eta^2 = 0$, bei Anwendung dieser Rechnung für allgemeine Fälle muß diese einschränkende Voraussetzung zugelassen werden). Da für jedes Feld stets der Krümmungsradius der Teilchenbahn $\varrho = m v c/e H$

ist, gilt für das Linienelement der Bahn $ds = \varrho d\varphi$ und mit $ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ und $\tan \varphi = d\xi/d\eta$:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{\varrho} &= \frac{e}{m v c} (H_0 + (\eta - \eta_0) |\text{grad } H|_0) d\eta \\ &= d\varphi \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Da nun für $\varphi = 0$ gerade $\varrho_0 = \frac{m v c}{e H_0}$ ist, ergibt die Integration:

$$\frac{1}{\varrho_0} \int_{\eta_0}^{\eta} \left\{ 1 + (\eta - \eta_0) \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} \right\} d\eta = \int_0^\varphi \cos \varphi d\varphi, \quad (6)$$

d. h. nach kurzer Rechnung die quadratische Gleichung*:

$$\begin{aligned} (\eta - \eta_0)^2 + (\eta - \eta_0) 2 \frac{H_0}{|\text{grad } H|_0} \\ - 2 \varrho_0 \frac{H_0}{|\text{grad } H|_0} \sin \varphi = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

so daß

$$\eta - \eta_0 = \frac{H_0}{|\text{grad } H|_0} \left\{ \sqrt{1 + 2 \varrho_0 \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} \sin \varphi} - 1 \right\}. \quad (8)$$

Es gilt nur die positive Wurzel, da $\eta = \eta_0$ für $\varphi = 0$ ist. Damit erhält man die Bahndifferentiale:

$$d\eta = \frac{\varrho_0 \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{1 + 2 \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} \varrho_0 \sin \varphi}} ; \quad (9)$$

$$d\xi = \frac{\varrho_0 \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 + 2 \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} \varrho_0 \sin \varphi}} \quad (10)$$

$$\text{und } ds = \frac{\varrho_0 d\varphi}{\sqrt{1 + 2 \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} 2 \varrho_0 \sin \varphi}} . \quad (11)$$

Da auch im inhomogenen Feld die LORENTZ-Kraft stets senkrecht auf der Teilchenbahn steht, so daß $ds/dt = v = \text{const}$ ist, läßt sich die Beziehung zwischen der Zeit und der Gyrationssphase φ durch Integration ermitteln, nämlich:

$$t = \frac{\varrho_0}{v} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + 2 \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} \varrho_0 \sin \varphi}} ; \quad (12)$$

$t = 0$ für $\varphi = 0$ gesetzt.

Dieses elliptische Integral läßt sich ersichtlich nach einfacher Rechnung auf die LEGENDRESche Normalform zurückführen. Sei $\chi(t) = \varphi$ die Umkehrfunktion von Gl. (12) so gilt:

$$d\eta = v \cos \chi(t) dt, \quad d\xi = v \sin \chi(t) dt,$$

für unsere Betrachtungen läßt sich jedoch eine weitere Auflösung des Gleichungssystems umgehen.

Durch Integration der Gln. (10), (11) im Falle $\varrho_0 \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} \ll 1$ ergibt sich die bereits von ALFVÉN

ermittelte Drift des Teilchens in ξ -Richtung. Es ist nämlich $\tau_D \approx 2\pi \varrho_0/v$ die Laufzeit des Teilchens für einen Umlauf und

$$\xi_D = \int_{\text{ein Umlauf}} d\xi = \pi \varrho_0^2 \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0}$$

der während dieser Zeit zurückgelegte Weg des Führungszentrums ($\int d\eta$ ist stets exakt gleich Null), so daß die Driftgeschwindigkeit:

$$v_D = \frac{v \varrho_0}{2} \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} \quad (13)$$

wird, oder wie man mit Gl. (3) erkennt:

$$v_D = -\vec{\xi}_0 \cdot \frac{v \varrho_0}{2} \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} \quad (14)$$

für positiv geladene Teilchen und mit positivem Vorzeichen für negativ geladene Teilchen.

Eine Erweiterung des ALFVÉNSchen Ergebnisses, der die Bewegung des Teilchens als eine Überlagerung einer Kreisbahn und einer konstanten Drift beschreiben konnte, erhält man nach Gl. (8).

In den Umkehrpunkten der Bahn bei $\varphi = \pi/2$ und $\varphi = 3\pi/2$ wird nämlich

$$(\eta - \eta_0)_{\max} \approx +\varrho_0 \left(1 - \frac{\varrho_0}{2} \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0}\right) \quad (15)$$

$$\text{und } (\eta - \eta_0)_{\min} \approx -\varrho_0 \left(1 + \frac{\varrho_0}{2} \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0}\right). \quad (16)$$

Die Terme $\pm \frac{\varrho_0^2}{2} \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0}$ charakterisieren die η -Abweichungen der Teilchenbahn von einer Kreisbahn und sind für die unter II zu beschreibende Plasmakompression von Bedeutung.

Von besonderem Interesse sind die Bahngleichungen für den entarteten Fall, d. h. wenn $2 \varrho_0 \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} = 1$ wird und für $2 \varrho_0 \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} > 1$. Kehren wir zu unserem speziellen Feld in der Vierpoldiagonalebene zurück, so ist

$$|\text{grad } H|_0 = \frac{H^*}{d} \quad \text{und} \quad H_0 = \frac{H^*}{d} \eta_0 ,$$

$$\text{so daß } \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} = \frac{1}{\eta_0} \quad \text{und} \quad \varrho_0 = \frac{m v c d}{e H^*} - \frac{1}{\eta_0}$$

wird.

$$\text{Im Falle } 2 \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} \varrho_0 = 1 \text{ wird } \eta_0 = 2 \varrho_0 , \quad (17)$$

und es entarten die Integrale Gl. (10) und Gl. (11). Der Wert für $\eta - \eta_0$ liegt jedoch nach Gl. (8) vor, und es ergibt sich für $\varphi = \pi/2$ und $\varphi = 3\pi/2$:

$$(\eta - \eta_0)_{\max} = (\sqrt{2} - 1) \eta_0 , \quad \text{d. h. } \eta_{\max} = \eta_0 \sqrt{2}$$

und $(\eta - \eta_0)_{\min} = -\eta_0 , \quad \text{d. h. } \eta_{\min} = 0$.

In diesem Falle (Abb. 8) berührt das Teilchen also die Gerade $\eta = 0$, um von dieser, da nunmehr die LORENTZ-Kraft verschwindet, nicht mehr ins Feld zurückzukehren. Die Driftgeschwindigkeit entartet damit zu

$$v_D = v_0 . \quad (18)$$

Wir wollen dieses spezielle η_0 durch η_0^* und das dazugehörige ϱ_0 durch ϱ_0^* kennzeichnen und die Größe

$$\eta_0^* = 2 \varrho_0^* = \sqrt{\frac{2 m v c d}{e H^*}} , \quad (19)$$

im Hinblick auf spätere, den charakteristischen Radius der Plasmasäule im Vierpolfeld nennen.

Im Halbraum $\eta < 0$ bleiben in Anlehnung an die Verhältnisse in der Vierpoldiagonalebene die Be-

ziehungen $H = (H^*/d) \eta$ und $|\text{grad } H| = H^*/d$ bestehen. Insbesondere wird damit:

$$\varrho = m v c/e H < 0,$$

d. h. die Bahn des Teilchens wird im umgekehrten Sinne wie im oberen Halbraum durchlaufen. Es liegt also eine Spiegelung der oben beschriebenen Bahnen an der Ebene $\eta = 0$ vor, insbesondere bleibt wegen $\varrho < 0$, $H < 0$ die Gleichung für die Drift des Teilchens mit Gl. (13) identisch.

Im Falle $2\varrho_0 \frac{|\text{grad } H|_0}{H_0} > 1$ wird, sobald das Teilchen die Ebene $\eta = 0$ überschreitet, die Wurzel der Gl. (8) imaginär. Wir brauchen jedoch nach obigem im negativen Halbraum nur die gespiegelte Bahn zu betrachten, so daß speziell

$$\eta_{\max} = -\eta_{\min} \text{ und für } \varphi = \pi/2 \text{ in Gl. (8),}$$

$$\eta_{\max} = \eta_0 \sqrt{1 + 2 \frac{\varrho_0}{\eta_0}} = \sqrt{2} \varrho_0 \eta_0 \sqrt{1 + \frac{\eta_0}{2 \varrho_0}} \text{ wird.}$$

Da für jedes $\eta_0 \varrho_0$ gilt $\eta_0^* = \sqrt{2 \varrho_0 \eta_0}$, bedeutet dieses, daß

$$\eta_{\max} < \eta_0^* \sqrt{2} \text{ und } |\eta_{\min}| < \eta_0^* \sqrt{2},$$

d. h. wir erhalten ein um $\eta = 0$ oszillierendes Teilchen. Im Grenzfall $\eta_0 = 0$ wird $\eta_{\max} = |\eta_{\min}| = \eta_0^*$ und die Driftgeschwindigkeit nach Integration von Gl. (10) und Gl. (11) näherungsweise

$$v_D = \frac{1}{5} v,$$

jedoch mit umgekehrter Driftrichtung wie in Gl. (14) (Abb. 3). Teilchen, die die Ebene $\eta = 0$ unter einem Winkel $0 < \varphi_0 < \pi/2$ durchlaufen, haben im Sinne unserer Definition kein Führungszentrum. Sie führen Oszillationen um $\eta = 0$ durch, wobei sich ihre Bahn nach Gl. (6) erhalten läßt, wenn man

$$\int_0^\varphi \cos \varphi d\varphi \text{ durch } \int_{\varphi_0}^\varphi \cos \varphi d\varphi$$

ersetzt. Dabei ist stets $\eta_{\max} = |\eta_{\min}| < \eta_0^*$ und im Grenzfall $\varphi_0 = \pi/2$ wieder: $v_D = v$ mit umgekehrter Driftrichtung wie in Gl. (14).

Ordnen wir den Teilchen, die kein Führungszentrum haben, ein „fiktives Führungszentrum“ zu, mit der Maßgabe, daß ein fiktives Feld:

$$H_f = \frac{H^*}{d} |\eta|; \quad (\vec{\eta}_0 \text{ grad } H_f) = -\frac{H^*}{d} \text{ für } \eta < 0$$

existieren soll, und daß das fiktive Führungszentrum eine Bahn erzeugen soll, welche für $0 > \eta_0^{\text{fikt}} > -\eta_0^*$ im positiven Gebiet $0 < \eta < \eta_0^*$

die gleiche Bahn wie in unserem wirklichen Fall ergeben soll, so läßt sich die Driftgeschwindigkeit in einem Diagramm nach Abb. 4 darstellen.

Dabei ist zu berücksichtigen, daß alle Teilchen mit $|\eta_0| < \eta_0^*$ definitionsgemäß zwei gleichberechnete spiegelsymmetrische Führungszentren besitzen. Die gestrichelte Kurve trägt den gespiegelten Führungszentren Rechnung.

II. Kompression eines Plasmas im idealisierten Vierpoldiagonalfeld

Im folgenden soll das Verhalten eines Plasmas in unserem unendlich ausgedehnten ξ, η, ζ -Gebiet mit

$$\tilde{\xi} = \vec{\xi}_0 \frac{H^*}{d} \eta, \quad \text{grad } H = \eta_0 \frac{H^*}{d}$$

untersucht werden. Es soll dabei im besonderen der Einfluß der inneren Reibung eines vollionisierten Gases auf die DichteVerteilung der Ionen in Abhängigkeit von der Ortskoordinate η diskutiert werden. Dabei sollen ausschließlich die Wechselwirkungen der Teilchen bei Stößen untereinander berücksichtigt werden, und es sollen vernachlässigt werden:

- a) Elektrische Raumladungsfelder,
- b) Einflüsse des HF-Feldes, welches die Erzeugung und Aufrechterhaltung des Plasmas bewirkt,
- c) Strahlungswedelwirkungen,
- d) Die thermische Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen,
- e) Abweichungen der Trägerverteilung vom stationären Zustand.

Zu a) Es möge zu irgendeinem Zeitpunkt eine IonendichteVerteilung $n_i^A(\eta)$ vorliegen. Weicht $n_i^A(\eta)$ wesentlich von der DichteVerteilung der Elektronen $n_e^A(\eta)$ ab, so werden die dabei auftretenden starken COULOMB-Felder eine spontane Durchmischung der Ionen und Elektronen bewirken. Als Endzustand wird $n_i^E(\eta) \approx n_e^E(\eta)$ werden und im Falle thermischen Gleichgewichts wegen des großen Unterschiedes zwischen dem mittleren Elektronen- und Ionenimpuls $n_e^E(\eta) \approx n_i^E(\eta) \approx n_i^A(\eta)$ verbleiben. Unsere Vernachlässigung (a) bedeutet daher, daß wir setzen:

$$n_e(\eta) = n_i(\eta) = n(\eta). \quad (20)$$

Im folgenden wird außerdem gezeigt werden, daß die magneto-hydrodynamischen Kräfte auf die Elektronen und Ionen so beschaffen sind, daß im Außenraum des Feldes die Beziehung (20) gerechtfertigt erscheint.

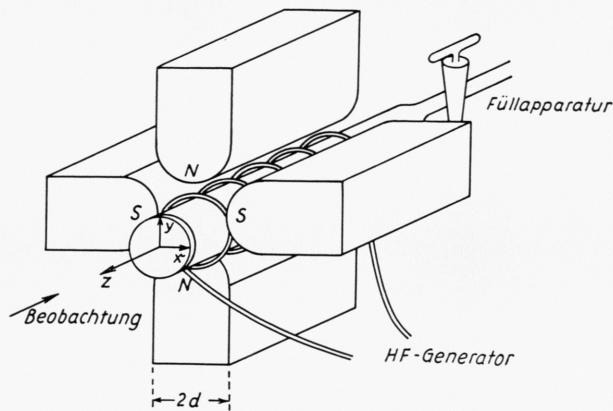


Abb. 1. Vierpolfeld mit Entladungsgefäß.

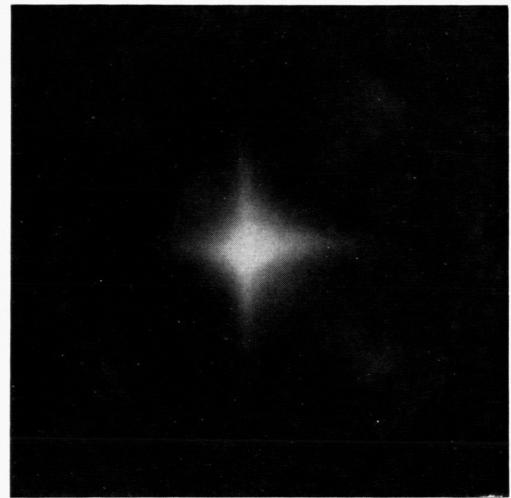


Abb. 2. HF-Entladung in Neon $H^*/d = 800$ GAUSS/cm, $p = 10^{-1}$ Torr $v_{HF} = 40$ Mhz, Gefäßdurchmesser = 3 cm.

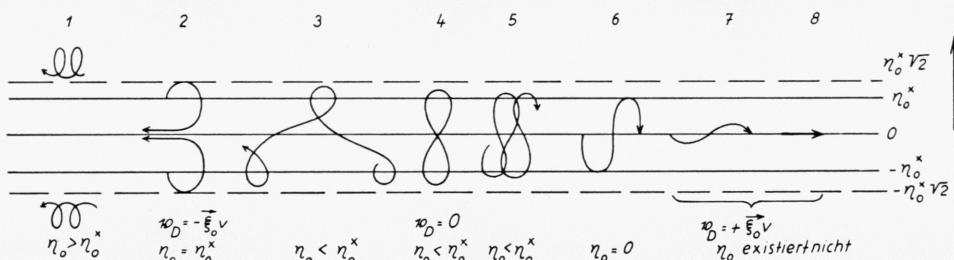


Abb. 3. Teilchenbahnen für verschiedene η_0 (skizziert).

* Anm. b. d. Korrektur: Eine äquivalente Beschreibung von Elektronenbahnen im Vierpolfeld findet sich bei E. ÅSTRÖM, Tellus **8**, 260 [1956].

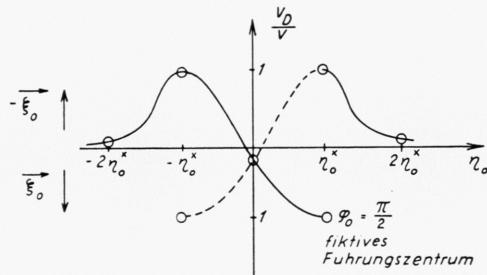


Abb. 4. Driftgeschwindigkeit als Funktion der η_0 -Koordinate des Führungszentrums dargestellt (skizziert).
○ = berechnete Werte.

Zu b) Das Plasma unterliegt einem ständigen Energieverlust durch frei-frei-Strahlung sowie durch Anregung und Ionisierung neutraler Atome sowie einem Ionenverlust durch Rekombination. Zu seiner Aufrechterhaltung ist daher eine ständige Energiezufuhr notwendig. Führt man dem Gas Energie durch elektromagnetische Hochfrequenzfelder zu, wobei die Amplitude des elektrischen Feldvektors von der Größenordnung $10 - 100 \text{ V/cm}$ sein möge, so ist im Frequenzbereich von 10 bis 100 MHz bei niedrigen Temperaturen der während einer Schwingung zurückgelegte Weg eines Ions klein gegen ϱ , bei höheren Temperaturen die Geschwindigkeitsänderung während einer Halbschwingung klein gegen v . In beiden Fällen kann der Einfluß des elektrischen HF-Feldes auf die oben ermittelten Ionenbahnen vernachlässigt werden.

Im Falle der Elektronen müßte die Anregungsfrequenz höher gewählt werden als die im Experiment benutzten Werte von 50–100 MHz. Wegen der Beziehung (20) dürften die Störungen des Hochfrequenzfeldes auf die Elektronenbahnen jedoch von untergeordnetem Einfluß für die Einstellung des Gleichgewichts sein. Da diese Tatsache wegen der Möglichkeit, die Versuche mit höheren Frequenzen durchzuführen, nicht von prinzipieller Bedeutung ist, soll dieser Fall nicht weiter diskutiert werden. Ebenso kann der Einfluß des magnetischen HF-Feldes vernachlässigt werden. Da der mittlere Zeitabstand zwischen zwei Teilchenstößen größer als (jedoch nicht groß gegen) $(\nu_{HF})^{-1}$ ist, darf als wesentliche Ursache für die Energiezufuhr aus dem HF-Feld „Gyrorelaxation“³ angenommen werden, wenngleich eine Theorie für den Fall eines elektromagnetischen Feldes mit Nulldurchgang auch noch nicht vorliegt. Die Beschleunigung der Elektronen im HF-Feld dürfte vor allem die Ionisation des Gases vermitteln, sie wird jedoch wegen der geringen Impulsübertragung beim Stoß Elektron → Ion zur Aufheizung der Ionen nur wenig beitragen.

Die Energieaufnahme durch Strahlung (c) ist wegen der geringen optischen Dicke des Plasmas ohne Bedeutung. Der Fall (e) wird später diskutiert.

Betrachten wir, wie im vorigen Abschnitt, ein einzelnes Teilchen im ξ, η, ζ -Raum, so bleibt stets

$$\int_{\text{ein Umlauf}} d\eta = 0,$$

d. h. es erfolgt keine Drift parallel zum Vektor $\text{grad } H$.

³ A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. **12a**, 822 [1957].

Daher kann bei Anwesenheit vieler Teilchen nur ein Wandern in dieser Richtung, also eine Kompression eines Plasmas erfolgen, wenn man die Stöße der Teilchen untereinander berücksichtigt. Im makroskopischen Bild geschieht dies im wesentlichen, d. h. bei Annahme eines skalaren Druckes, durch die Wirkung des MAXWELLSchen Spannungstensors des gesamten elektromagnetischen Feldes, und es ergibt sich im Gleichgewichtszustand:

$$\text{grad } p = - \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B} \text{rot } \mathfrak{B}] .$$

Dabei können wir schreiben:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \Sigma \mathfrak{H}_i + \Sigma \mathfrak{H}_e ,$$

wobei \mathfrak{H} unser statisches Magnetfeld, $\mathfrak{H} = \vec{\xi}_0 \frac{H^*}{d} \eta$; $\Sigma \mathfrak{H}_i$ der Feldanteil aller im Feld befindlichen bewegten Ionen und $\Sigma \mathfrak{H}_e$ der aller Elektronen ist.

Da nun $\mathfrak{H} \gg \Sigma \mathfrak{H}_i$ und $\gg \Sigma \mathfrak{H}_e$ und $\text{rot } \mathfrak{H} = 0$ ist, bleibt, wenn wir noch $p = p_i + p_e + p_0$ setzen, unter Vernachlässigung elektrischer Raumladungsfelder:

$$\text{grad } p_i = - \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{H} \text{rot } \Sigma \mathfrak{H}_i]$$

$$\text{und } \text{grad } p_e = - \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{H} \text{rot } \Sigma \mathfrak{H}_e] ,$$

da $\text{grad } p_0 = 0$ gesetzt werden kann.

Betrachten wir jetzt die Driftströme der Ionen und Elektronen unter dem Einfluß der Zusammenstöße als echte Teilchenströme, indem wir berücksichtigen, daß durch einen Zusammenstoß zwar die Teilchenbahn verändert, jedoch nicht, falls die freie Weglänge $\lambda \gg \varrho$ ist, die Drift unterbrochen wird. Dann folgt für die Ionen:

$$\frac{1}{4\pi} \text{rot } \Sigma \mathfrak{H}_i = \frac{1}{c} \mathbf{j}_D^{(i)} = \frac{e}{c} n_i v_D^{(i)},$$

so daß nach Gl. (14) im Außenraum des Feldes, d. h. für $\frac{\text{grad } H}{H} \ll \varrho^{-1}$:

$$\text{grad } p_i = - n_i \frac{m_i}{2} v_i^2 \frac{\text{grad } H}{H} = - n_i k T \frac{\text{grad } H}{H} \quad (21)$$

und entsprechend für die Elektronen

$$\text{grad } p_e = - n_e \frac{m_e}{2} v_e^2 \frac{\text{grad } H}{H} . \quad (22)$$

Unabhängig von dieser makroskopischen Betrachtungsweise können wir die Beziehungen Gl. (21) und (22) verifizieren, wenn wir der Ursache für die Entstehung des Dichtegradienten direkt nachgehen, indem wir eine statistische Betrachtung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Teilchen im Falle

thermischen Gleichgewichts als Funktion ihrer η -Koordinate durchführen.

Im Gleichgewichtszustand ist die Dichte $n(\eta)$ zeitlich konstant. Ebenfalls konstant ist dann auch die Dichte der Führungszentren, die wir mit $n^*(\eta)$ bezeichnen wollen. Diese Dichtevertteilung $n^*(\eta)$ soll zunächst ermittelt werden.

Das Gleichgewicht läßt sich dann charakterisieren durch die Forderung, daß für jedes beliebige Zeitintervall Δt im Mittel die Zahl der Ionen, die eine beliebige vorgegebene Ebene $\eta = \eta_0$ in Richtung $\eta > \eta_0$ passieren und dort einen Zusammenstoß erleiden, gleich ist der in Richtung $\eta < \eta_0$ passierenden und dort stoßenden Ionen. Im folgenden soll zunächst der Fall diskutiert werden, daß die freie Weglänge unabhängig ist von der Ionendichte, also der Fall eines schwach ionisierten Gases. Betrachten wir jetzt ein Teilchen mit der Führungskoordinate $\eta' < \eta_0$, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Teilchen innerhalb eines vorgegebenen Bereiches zwischen η und $\eta + d\eta$ einen Zusammenstoß erleidet:

$$dW = 2 \frac{v}{\lambda} \frac{ds(\eta)}{s(\eta')} \Delta t; \text{ falls } \lambda \gg \varrho(\eta') \text{ ist,}$$

wobei ersichtlich $ds = d\eta \cos \varphi = \varrho d\varphi \cos \varphi$ und φ

wobei im inneren Integral über die gesamte Bahn im Bereich $\eta > \eta_0$ zu integrieren ist, und φ_0 mit $\eta_0 = \eta'_0 \sqrt{1 + (2 \varrho_0'/\eta_0') \sin \varphi_0}$ von η_0 und η'_0 abhängt. Benutzen wir jetzt Gl. (6), indem wir von φ_0 bis $\pi/2$ integrieren, so daß

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1 + (2 \varrho_0/\eta_0) (\sin \varphi - \sin \varphi_0)}}$$

wird, und berücksichtigen wir, daß stets $2 \varrho \eta = \eta_0^{*2}$ ist, so ergibt sich nach kurzer Rechnung als erste Näherung in ϱ_0/η_0 mit $\varrho_0/\eta_0 = \frac{1}{2}(\eta_0^{*2}/\eta_0^2)$:

$$2 \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \varrho d\varphi = \frac{\eta_0^{*2}}{\eta_0} \left\{ \left(1 + \frac{\eta_0^{*2}}{2 \eta_0^2} \sin \varphi_0 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) - \frac{\eta_0^{*2}}{2 \eta_0^2} \cos \varphi_0 \right\}.$$

Da ferner nach Gl. (8) und (9)

$$d\eta'_0 = \frac{\cos \varphi_0 d\varphi_0}{\eta'_0} \frac{\eta_0^{*2}}{2}$$

und nach obigem $s(\eta') = 2\pi\varrho_0'$ ist, bleibt

$$N'(\Delta t) = \frac{v}{\lambda} \frac{\Delta t}{\pi} \frac{\eta_0^{*2}}{\eta_0} \int_0^{\pi/2} n^*(\eta') \cos \varphi_0 \left\{ \left(1 + \frac{\eta_0^{*2}}{2 \eta_0^2} \sin \varphi_0 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) - \frac{\eta_0^{*2}}{2 \eta_0^2} \cos \varphi_0 \right\} d\varphi_0.$$

Dabei können wir $n^*(\eta')$ als TAYLOR-Reihe um $\eta = \eta_0$ entwickeln:

$$n^*(\eta') = n^*(\eta_0) \left[1 + \frac{\eta'_0 - \eta_0}{n^*(\eta_0)} \left(\frac{dn^*}{d\eta} \right)_{\eta_0} + \frac{(\eta'_0 - \eta_0)^2}{2 n^*(\eta_0)} \left(\frac{d^2 n^*}{d\eta^2} \right)_{\eta_0} + \dots \right]$$

oder nach Gl. (8):

$$n^*(\eta') = n^*(\eta_0) \left[1 - \frac{\eta_0^{*2}}{2 \eta_0} \sin \varphi_0 \left(\frac{dn^*}{d\eta} \right)_{\eta_0} \frac{1}{n^*(\eta_0)} + \frac{\eta_0^{*4}}{2 \eta_0^2} \sin^2 \varphi_0 \left(\frac{d^2 n^*}{d\eta^2} \right)_{\eta_0} \frac{1}{n^*(\eta_0)} + \dots \right].$$

die Gyrationssphase ist, in der das Teilchen die Schicht schneidet. Außerdem ist

$$s(\eta'_0) = \int_0^{2\pi} \frac{\varrho_0' d\psi}{\sqrt{1 + (2 \varrho_0'/\eta_0') \sin \psi}} \approx 2\pi \varrho_0' \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\varrho_0'}{\eta_0'} \right)^2 \right)$$

die Weglänge für einen Teilchenumlauf. Im folgenden wollen wir alle Glieder mit $(\varrho/\eta)^n$; $n \geq 2$ gegen 1 vernachlässigen, was gleichbedeutend ist mit der Forderung $\frac{\text{grad } H}{H} \ll \varrho^{-1}$ ist. Betrachten wir jetzt eine Schicht zwischen η'_0 und $\eta'_0 + d\eta'_0$ und sei $n^*(\eta'_0)$ die „Führungsichte“ in diesem Bereich, so erleiden pro Flächeneinheit

$$d^2 N = 2 n^*(\eta') d\eta' \frac{v}{\lambda} \Delta t \frac{ds(\eta)}{s(\eta')}$$

Teilchen dieser Schicht zwischen η und $\eta + d\eta$ einen Zusammenstoß im Zeitintervall Δt . Für die Gesamtzahl der Teilchen mit $\eta'_0 < \eta_0$, die im Bereich $\eta > \eta_0$ stoßen, erhalten wir dann

$$N'(\Delta t) = 4 \frac{v}{\gamma} \Delta t \int_{\eta'_0 \min}^{\eta_0} \left\{ \frac{n^*(\eta')}{s(\eta')} \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \varrho d\varphi \right\} d\eta', \quad (23)$$

Bilden wir auf analoge Weise den Ausdruck $N''(\Delta t)$ für alle Teilchen, deren Führungszentrum $\eta_0'' > \eta_0$ ist, und deren Bahnen die Ebene $\eta = \eta_0$ schneiden, so unterscheidet sich dieser gerade im Vorzeichen der sin- und cos-Glieder von $N'(\Delta t)$. Im Gleichgewichtsfall muß dann gelten:

$$N''(\Delta t) - N'(\Delta t) = 0,$$

so daß

$$0 = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_0 d\varphi_0 \left\{ \frac{\eta_0^{*2}}{2\eta_0^2} \sin \varphi_0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) - \frac{\eta_0^{*2}}{2\eta_0^2} \cos \varphi_0 + \frac{\eta_0^{*2}}{2\eta_0} \left(\frac{dn^*}{d\eta} \right)_{\eta_0} \frac{1}{n^*(\eta_0)} \sin \varphi_0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) \right\}.$$

Nach kurzer Rechnung folgt daraus

$$\left(\frac{dn^*}{d\eta} \right)_{\eta_0} \frac{1}{n^*(\eta_0)} = - \frac{1}{\eta_0}.$$

Da sich $n^*(\eta)$ von $n(\eta)$ nicht im Glied erster Ordnung in η/η_0 unterscheidet, wie man leicht durch Bildung des Schwerpunktes der Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei einem Umlauf verifiziert, bleibt diese Beziehung gültig, wenn man $n^*(\eta_0)$ durch $n(\eta_0)$ ersetzt. Da ferner unsere Betrachtung für jedes η_0 gültig war, gilt also für unseren Außenraum, wenn wir wieder $\frac{\text{grad } H}{H} = \frac{1}{\eta}$ einführen:

$$\frac{\text{grad } n}{n} = - \frac{\text{grad } H}{H}.$$

Wie bereits in Gl. (21) gefunden, jedoch nur für schwach-ionisierte Gase, d. h. wenn λ nicht von $n(\eta)$ abhängt.

Für den Fall thermischen Gleichgewichts läßt sich dieses Ergebnis physikalisch interpretieren, wenn wir noch $n_i k T = p_i$, $n = n_i$ schreiben. Dann folgt

$$\text{grad } p_i = - n_i k T \frac{\text{grad } H}{H} = - n_i \mu_i \text{grad } H,$$

wobei $\mu_i = m_i/2 \cdot v_i^2(1/H)$ das magnetische Bahnmoment der Ionen darstellt. Da unsere Betrachtung unabhängig von der Masse der Teilchen durchgeführt wurde, erhält man die entsprechende Beziehung Gl. (22) für Elektronen. Die innere Reibung vermittelt also gerade eine Volumenkraft, die man auch erhielte, wenn man die kreisenden Ionen als Magneten mit dem Moment μ_i im inhomogenen Feld betrachten würde. Andererseits stellt das Ergebnis gerade das magneto-hydrodynamische Gleichgewicht zwischen der LORENTZ-Kraft der Driftströme und dem Druck der geladenen Teilchen dar.

Im Falle stärkerer Ionisierung des Gases darf λ nicht mehr als unabhängig von n angesehen werden. Wir setzen jetzt $\lambda = a/(b n_0 + n^*)$. Dabei sei n_0 die Dichte des neutralen Gases, n^* wieder die Führungsdichte der Ionen und durch den Koeffizienten b mögen die unterschiedlichen Stoßquerschnitte der

neutralen und der geladenen Teilchen berücksichtigt werden. Wir wollen n_0 als konstant im gesamten Raum annehmen. Dann muß in Gl. (23) $1/\lambda$ mit unter das innere Integral genommen werden, da dieses ja die Stoßwahrscheinlichkeit eines Teilchens längs seiner Bahn im betrachteten Bereich angab.

Damit ergibt sich nach analoger Rechnung wie oben mit $n \approx n^*$:

$$\text{grad } p_i = - n k T \frac{\text{grad } H}{H} \frac{b n_0 + n}{b n_0 - n}. \quad (24)$$

Das heißt, die Kraft $\text{grad } p_i$ steigt bei erhöhter Ionisierung des Gases an, was dadurch zu verstehen ist, daß die Teilchen längs ihres Weges im starken Teil ihres Feldbereiches wegen der stärkeren Krümmung der Bahn nicht nur kürzere Strecken zurücklegen, sondern außerdem in diesem Teil auch noch mit geringerer Wahrscheinlichkeit einen Zusammenstoß erleiden. Das Ergebnis zeigt an, daß n stets kleiner als $b n_0$ bleibt, d. h. es wandern stets so viele Teilchen in den Innenbereich des Feldes $\eta \leq \eta_0^*$ ab, daß Gl. (24) nicht singulär wird. Es müßte also bei hoher Ionisierung ein steiler Dichteabfall bei $\eta \approx \eta_0^*$ zu erwarten sein.

Eine vertiefte Diskussion dieses Ergebnisses, insbesondere der Stabilitätseigenschaften eines solchen Plasmas dürfte jedoch erst nach genauerer Kenntnis der Verhältnisse im Innenraum des Feldes und evtl. nach eingehenden experimentellen Untersuchungen möglich sein.

Betrachten wir jetzt wieder ein einzelnes Teilchen im Plasma, so besagen die Ergebnisse, daß dieses vor Einstellung eines Gleichgewichtszustandes neben der ALFVÉNSchen Driftbewegung, die ein Wandern in Richtung senkrecht zum Feldvektor \mathfrak{H} und senkrecht zum Feldgradienten zur Folge hat, außerdem eine Bewegung in Richtung des negativen Feldgradienten vollführt. Diese Bewegung hat wegen ihres ursächlichen Zusammenhangs mit den thermischen Zusammenstößen der Teilchen Diffusionscharakter. Die Diffusionsgeschwindigkeit im Anfangszustand, d. h. bei anfänglicher gleichmäßiger Verteilung der

Ionen nach plötzlicher Einschaltung des Magnetfeldes läßt sich ermitteln. Es gilt nämlich:

$$v_{\text{Diff}} = s_{\perp}/t_{\text{Stoß}},$$

wo s_{\perp} der im Mittel in η -Richtung pro Stoß zurückgelegte Weg des Teilchens und $t_{\text{Stoß}} = \lambda/v$ die mittlere Stoßzeit des Teilchens bedeutet; mit Gl. (21) ist aber ersichtlich:

$$s_{\perp} = \varrho \frac{dn}{n} = \varrho^2 \frac{\text{grad } H}{H},$$

$$\text{so daß } v_{\text{Diff}} = \frac{v \varrho}{2} \frac{\text{grad } H}{H} \cdot 2 \frac{\varrho}{\lambda} = 2 \frac{\varrho}{\lambda} v_D \quad (25)$$

wird.

Diese Beschreibung des diamagnetischen Verhaltens eines Plasmas dürfte auch von Bedeutung sein bei der Betrachtung kosmischer oder geophysikalischer Phänomene, bei denen die Stoßwechselwirkung geladener Teilchen in inhomogenen Magnetfeldern eine Rolle spielt. Bei unseren bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, daß der Einfluß der COULOMB-Felder zu vernachlässigen sei. Im Außenraum $\eta \gg \eta_0^*$ ist diese Annahme begründet, da nach Gl. (21) und (22) im thermischen Gleichgewicht $\frac{\text{grad } p_i}{n_i} = \frac{\text{grad } p_e}{n_e}$. Betrachten wir jetzt den Bereich $\eta \approx \eta_0^*$ und benutzen wieder

$$\text{grad } p = \frac{1}{c} [j_D \mathfrak{H}] = \frac{n e}{c} [v_D \mathfrak{H}],$$

so besitzt, wenn wir v_D nach ϱ/η entwickeln, das quadratische Glied ein entgegengesetztes Vorzeichen wie das lineare und $\text{grad } p$ steigt mit fallendem η weniger steil an als $1/\eta$. Da nun der charakteristische Radius η_0^* für Elektronen näher am Zentrum $\eta=0$ liegt als für Ionen, bedeutet dieses, daß die Elektronen im Zentralbereich stärker komprimiert werden als die Ionen, d. h. u. a. daß auf die Ionen zusätzliche COULOMB-Kräfte wirken, die eine noch stärkere Kompression des Plasmas als Gl. (21) angibt, bewirken.

Einen sehr groben Einblick in die Verhältnisse in der Nähe von $\eta=0$ erhalten wir, wenn wir nur die Teilchen, für deren Führungszentrum $\eta_0 \approx \eta_0^*$ gilt, betrachten. Für diese Teilchen wird ja die Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei $\eta \approx 0$ besonders groß. Betrachten wir zunächst den Fall $\eta_0 > \eta_0^*$, so ergibt sich also maximale Aufenthaltsdauer für $\varphi \approx 3\pi/2$, d. h. wenn wir ein willkürliches φ_0 mit $\varphi_0 \ll 2\pi$ annehmen, so durchläuft das Teilchen den Winkelbereich $(3\pi/2) - \varphi_0 < \varphi < (3\pi/2) + \varphi_0$ in einem relativ großen Zeitintervall T_0 und den Bereich

$0 < \varphi < (3\pi/2) - \varphi_0$ und $(3\pi/2) + \varphi_0 < \varphi < 2\pi$ in einem relativ großen Zeitintervall T_1 . Dann ergibt sich nach Gl. (11) für T_0 :

$$T_0 = \frac{\varphi_0}{v} \int_{\frac{3\pi}{2} - \varphi_0}^{\frac{3\pi}{2} + \varphi_0} \frac{d\varphi}{[1 + 2(\varphi_0/\eta_0) \sin \varphi]^{1/2}} \approx \frac{2 \varphi_0 \varphi_0}{v [1 - 2(\varphi_0/\eta_0)]^{1/2}} = \frac{\varphi_0 \eta_0^{*2}}{v [\eta_0^2 - \eta_0^{*2}]^{1/2}}.$$

Nun ist nach Gl. (8)

$$\eta_{\min} = \eta_0 \sqrt{1 - \frac{2 \varphi_0}{\eta_0}} = \sqrt{\eta_0^2 - \eta_0^{*2}},$$

$$\text{so daß } T_0 = \frac{\varphi_0 \eta_0^{*2}}{v \eta_{\min}}.$$

T_1 erhalten wir, wenn wir den Rest der Bahn durch eine Kreisbahn mit $R = \eta_0^*$ annähern. Dann wird $T_1 \approx 2\pi \eta_0^*/v$, so daß

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{\varphi_0}{2\pi} \frac{\eta_0^*}{\eta_{\min}} \quad (26)$$

die relative Verweilzeit des Teilchens im Winkelbereich $(3\pi/2) - \varphi_0 < \varphi < (3\pi/2) + \varphi_0$ wird. Das relative Zeitintervall, währenddessen sich das Teilchen in diesem Winkelbereich aufhält, wird im Rahmen der hier durchgeföhrten Näherung aus bestimmt sein für die Einstellung des Dichtegleichgewichts. Sei $n_{\text{Part}}(\eta_1)$ die Dichte in einer Ebene $\eta = \eta_0$ ($\eta_1 \ll \eta_0^*$) so erhalten wir mit Gl. (26) allgemein die Dichte für $\eta < \eta_1$

$$n_{\text{Part}}(\eta) = n_{\text{Part}}(\eta_1) (\eta_1/\eta). \quad (27)$$

Der Index „part“ soll andeuten, daß wir bisher nur solche Teilchen berücksichtigt haben, deren Führungszentrum

$\eta_0 > \eta_0^*$ ist, und für die $(\eta_0/\eta_0^*) - 1 \ll 1$ gilt.

Liegt das Führungszentrum in der Nähe von η_0^* aber $\eta_0 < \eta_0^*$, so haben wir ähnliche Verhältnisse: Das Teilchen überschreitet die Ebene $\eta = 0$, wobei die Krümmung ihr Vorzeichen wechselt. Durch eine analoge Betrachtung erhält man ebenfalls Gl. (27).

In dieser groben Betrachtungsweise, in der speziell Teilchen mit fiktivem Führungszentrum vernachlässigt wurden, steigt also die Dichte auch in der Nähe der Zentralachse noch steil an.

Die Charakterisierung der Dichte durch die Aufenthaltswahrscheinlichkeit wird notwendig ungültig, wenn die freie Weglänge nicht mehr groß ist gegen die Bahnlänge eines Teilchenumlaufs. Es ist also zu folgern, daß die maximale relative Teilchendichte im Zentrum mit steigendem Druck geringer wird.

Im Falle eines in ξ -Richtung begrenzten Feldes läßt sich eine qualitative Aussage über die Dichte im Zentrum herleiten. Es sei $\lambda_{\eta=0} > l$ wobei l die Länge des Feldbereichs in ξ -Richtung beschreibe. Es sei also $H(\xi \eta) = (H^*/d) \eta$ für $0 < \xi < l$ und $H = 0$ für $\xi > l$, $\xi < 0$. Die Begrenzung des Feldbereiches hat zur Folge, daß alle Teilchen, für die $\eta_0 \approx \eta_0^*$ ist, die ja nach Gl. (18) eine Driftbewegung im Bereich $|\eta| \approx 0$ in ξ -Richtung mit $v_D \approx v$ durchführen, den Feldbereich mit großer Wahrscheinlichkeit verlassen können. Durch diesen Effekt wird also ein ständiger Teilchenstrom in ξ -Richtung nach beiden Seiten im Gebiet $\eta \approx 0$ fließen, so daß die Teilchendichte bei $\eta = 0$ ein relatives Minimum durchläuft.

Der Maximalwert von $n(\eta)$ läßt sich angenähert erhalten, wenn man postuliert, daß gerade die Teilchen noch im Plasma verbleiben, die bei einem halben Umlauf $\pi < \varphi < 2\pi$ den Weg l zurücklegen. Der maximale Krümmungsradius ihrer Bahn ist dann:

$$\varrho_{\max} = \frac{m v c d}{e H^*} \frac{1}{\eta_{\min}} = \frac{\eta_0^{*2}}{2 \eta_{\min}}$$

und wenn man die Bahn durch ein Kreisbogenstück über l mit dem Radius ϱ_{\max} approximiert, so erhält man, da $\varrho_{\max} \gg \eta_0^*$,

$$\varrho_{\max} \eta_0^* = \frac{l^2}{4}, \quad \text{so daß} \quad \frac{\eta_{\min}}{\eta_0^*} = 2 \left(\frac{\eta_0^*}{l} \right)^2$$

oder nach Gl. (27)

$$n_{\max}(\eta) = \frac{1}{2} n(\eta_0^*) \left(\frac{l}{\eta_0^*} \right)^2. \quad (28)$$

Das Auftreten eines relativen Ionendichteminimums an der Stelle $\eta = 0$ läßt sich bei kleinem Gasdruck $\lambda \gg l$ im Zentrum eines Vierpolfeldes experimentell nachweisen.

III. Übergang zum Vierpolfeld

Unsere Betrachtungen im ξ, η, ζ -Gebiet waren dem magnetischen Feldverlauf in den beiden Diagonalebenen des Vierpolfeldes angepaßt. In diesem Fall stand der Feldgradient stets senkrecht auf dem Feldvektor \mathfrak{H} . Für jede andere Diagonalebene des Vierpolfeldes ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, jedoch ist stets für eine vorgegebene Ebene der Winkel $\not\{ \text{grad } H, \mathfrak{H} \} = \delta$ konstant. Es ist daher angebracht, unsere Betrachtungen zunächst auf den Fall eines festen Winkels δ zu verallgemeinern. Wir nehmen jetzt an, daß der Bahnradius so klein sei, daß sich die Richtung von \mathfrak{H} und damit der Vektor $\text{grad } H = \mathfrak{r}_0(H^*/d)$ längs der Bahn nicht ändern

möge (Außenraum des Feldes). Betrachten wir nun wieder Teilchen, die in der Richtung parallel zum Feldvektor keine Geschwindigkeitskomponente besitzen, so liegt wieder die gesamte Bahn in einer Ebene senkrecht zu \mathfrak{H} , da der Vektor der LORENTZ-Kraft stets senkrecht auf \mathfrak{H} steht. Seien ξ^B, η^B orthogonale Koordinaten in der Bahnebene, wobei η_0^B in Richtung der Projektion von $\text{grad } H$ auf diese Ebene weisen möge, und es sei \mathfrak{H}_0 der Einheitsvektor in Richtung \mathfrak{H} , so ergibt sich für den Krümmungsradius der Bahn:

$$\varrho^B = \frac{m v c}{e H(\eta^B)}$$

und mit $\eta_0^B = \eta^B$ -Koordinate der Teilchen für $\varphi^B = 0$, φ^B = Gyrationssphase gegen die ξ -Richtung, sowie:

$$H_0^B = H(\eta_0^B), \quad \varrho_0^B = \frac{m v c}{e H_0^B}$$

analog Gl. (5) die TAYLOR-Entwicklung

$$H(\eta^B) = H_0^B + (\eta^B - \eta_0^B) |\text{grad } H|_0 |[\mathfrak{H}_0(\mathfrak{H}_0 \bar{r}_0)]| \\ = H_0^B + (\eta^B - \eta_0^B) |\text{grad } H|_0 |\sin \delta|.$$

Dabei wird, in unseren ursprünglichen x, y, z -Koordinaten des Vierpolfeldes geschrieben:

$$|\text{grad } H| |\sin \delta| = 2 \left| \frac{\mathfrak{r}_0 x y^2 + \mathfrak{y}_0 y x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| \frac{H^*}{d}.$$

Damit lassen sich alle unsere vorhergehenden Beziehungen, soweit sie Teilchen im Außenraum $|\text{grad } H| \varrho_0 \ll 1$ betreffen, verallgemeinern, indem $|\text{grad } H|$ durch $\frac{|\text{grad } H|}{H} |\sin \delta|$ ersetzt wird.

Schreiben wir: $\text{grad}_{\perp} H = [\mathfrak{H}_0(\mathfrak{H}_0 \bar{r}_0)] |\text{grad } H|$, so gibt $\text{grad}_{\perp} H$ die Vektorkomponente von $\text{grad } H$ in der Ebene der Teilchenbahn an. Unsere Beziehung Gl. (21), die den Ionendichteabfall im Außenfeld angibt, wurde erhalten, indem der Einfluß der Feldinhomogenität auf die Teilchenbahn in der Ebene senkrecht zum Feldvektor untersucht wurde. Für die Bahngestalt ist jetzt aber gerade der Vektor $\text{grad}_{\perp} H$ maßgebend, so daß wir erhalten:

$$\frac{\text{grad}_{\perp} n}{n} = - \frac{\text{grad}_{\perp} H}{H}, \quad (33)$$

dabei beschreibt $\text{grad}_{\perp} n$ nur das Dichtegefälle senkrecht zu \mathfrak{H} , welches durch das diamagnetische Verhalten des Gases verursacht wird. Im Gleichgewichtsfall ist unabhängig hiervon der Dichteabfall parallel zu \mathfrak{H} zu berücksichtigen, der hervorgerufen wird, weil $\text{grad}_{\perp} H$ längs einer Feldlinie veränderlich ist.

Im Vierpoldiagonalfeld ließ sich zeigen, daß der wesentliche Teil des Gases im Bereich $\eta_0^* > \eta > -\eta_0^*$ durch diamagnetische Kompression vereinigt wurde. Wir betrachten jetzt $\pm \eta_0^*$ als Grenzen des Gültigkeitsbereichs von Gl. (21). Damit läßt sich dieser Bereich auf das gesamte Vierpolfeld erweitern, indem wir die Feldlinien, die durch $\pm \eta_0^*$ hindurchgehen, als Begrenzungslinien des Gültigkeitsbereichs von Gl. (33) annehmen. Dann wird für alle z :

$$x \cdot y = \frac{1}{2} \eta_0^{*2} = \frac{m v c d}{e H^*} \quad (34)$$

die Begrenzungsfläche des „Innenraums“ des Vierpolfeldes, da jede Feldlinie sich durch $x y = \text{const}$ beschreiben läßt.

In dem von hyperbolischen Zylindern begrenzten Gebiet [Gl. (34)] wird also der wesentliche Teil des Gases vereinigt. Der diamagnetische Anteil der Kompression erfolgt dabei entlang der Orthogonaltrajektorien der Feldlinien, d. h. entlang der Potentiallinien $\psi = (\psi_0/d^2)(y^2 - x^2) = \text{const}$. Bewegt man sich auf einer solchen Linie, so erhält man maximale Dichte für $x = 0$ bzw. $y = 0$, da in diesem Falle $\nabla \psi$ parallel ∇H steht, so daß $\nabla \perp H = 0$ wird.

Andererseits erhält man ein Dichtegefälle, wenn man sich, vom Mittelpunkt $x = y = 0$ ausgehend, entlang der Geraden $x = 0$ bzw. $y = 0$ bewegt, da mit steigendem ψ die Potentiallinien in Gebieten verlaufen, in denen $|\sin \delta|$ und damit

$$|\nabla \perp H| = (H^*/d) |\sin \delta|$$

kleiner wird.

Die sternförmige Lichtintensitätsverteilung der Abb. 2, die ja direkt auf die Ionendichtevertteilung im Vierpolfeld schließen läßt, wird also durch diese Betrachtungen qualitativ bestätigt. Insbesondere wird aus allen Richtungen δ zum Mittelpunkt hin ein Ionendichteanstieg erhalten, wobei maximale Kompression entlang der Diagonale und schwächere Kompression entlang der Koordinatenachsen erhalten wird. Zur Charakterisierung der Entladung benutzt man zweckmäßigerweise den Dichteanstieg entlang der Diagonalen, wobei die Ergebnisse des ersten und zweiten Abschnittes diesem Falle weitgehend gerecht werden.

Die angenäherte Beschreibung der Ionendichtevertteilung im Diagonalfeld liefert noch keine quantitativen Bestimmungen des Dichteanstiegs. Sie zeigt jedoch, daß man einen steilen Anstieg im Inneren $|\eta| < \eta_0^*$ und daß man im Zentrum $\eta = 0$ eine nahezu konstante Ionendichte erhält. Damit ist fest-

gelegt, daß der wesentliche Anteil des ionisierten Gases im Zentralbereich komprimiert wird.

Der Diagonaldurchmesser dieses Bereiches bestimmt sich dabei nach Gl. (19) zu:

$$2 \eta_0^* = \sqrt{\frac{8 m v c d}{4 Z e H^*}} = \sqrt{\frac{8 d c}{4 Z e H^*}} (2 m k T)^{1/4}, \quad (35)$$

wenn man noch e durch $Z e$, mit Z = Ladungszahl der betrachteten Ionen, ersetzt und $(m/2) v^2 = k T$, mit k = BOLTZMANN-Konstante, T = absolute Temperatur des Gases, berücksichtigt.

Für $T = 300^\circ\text{K}$ (schwache Anregung des Gases) findet man experimentell z. B. für Neon $\eta^{(1/2)} \approx \frac{1}{3} \eta_0^*$, wenn mit $2 \eta^{(1/2)}$ die Halbwertsbreite der Lichtintensitätsverteilung längs einer Diagonallinie $x = \pm y$ bezeichnet wird.

IV. Anwendungen

In einem in z -Richtung begrenzten Vierpolfeld erhält man die durch Gl. (34) beschriebene charakteristische Entladungsfigur bei schwacher Anregung (bis 100 Watt Senderleistung) in einem Druckbereich von 10^{-3} bis 1 Torr. Bei stärkerer Anregung (maximal verwendete Senderleistung = 1 kW) erhält man von 10^{-1} bis 5 Torr dieselbe Figur, wobei jedoch ab 0,5 Torr mit steigender Dichte eine Verbreiterung derselben auftritt.

Bei kleineren Drucken verteilt sich, wahrscheinlich als Folge der Drift der Teilchen die Entladung im wesentlichen auf das gesamte Volumen und die Figur bleibt nur in schwachem Kontrast zur Umgebung bestehen.

Verwendet man ein zyklisches Vierpolfeld mit $\psi = \pm \psi_0 (1/d^2) (x^2 + y^2 - z^2)$, so liegen ersichtlich ähnliche Feldverhältnisse wie in dem hier behandelten Fall vor, und man vermeidet ein Herausdriften der Teilchen aus dem Feldbereich. In diesem Falle erhält man auch bei Anregung mit 1 kW Senderleistung eine dem rotationssymmetrischen Fall von Gl. (34) entsprechende Entladungsfigur ab 10^{-3} Torr.

Wegen der weitgehenden Lösung der Entladung von den Gefäßwänden erscheint die Methode zur Erzeugung hoher Temperaturen in verdünnten Gasen geeignet.

Abweichend von unseren experimentell realisierten Fällen kann man ein in z -Richtung unbegrenztes Vierpolfeld verwenden, indem ein Feld mit einem torusartigen Zentralbereich genommen wird, d. h.

indem die Entladung nicht mehr entlang der z -Achse, sondern entlang eines Kreises mit dem Radius $R_{\text{tor}} \gg d$ komprimiert wird. Auch dann wird ein Ionen- und Energieverlust an den Feldenden nicht mehr auftreten.

Mit einer solchen Anordnung würde man einen kreisförmigen geschlossenen Ring hoher Ionenkonzentration erhalten können, welcher evtl. die Vorionisation für eine stromstarke Pinchentladung bilden könnte. Die Stabilisierungseigenschaften des Vierpolfeldes für entlang seiner Zentralachse fließende Ionenströme müßten dazu näher untersucht werden.

Da eine HF-Entladung im Vierpolfeld noch bei niedrigeren Drucken brennen kann als eine Gleichstrom- oder HF-Entladung ohne Feld, dürfte diese Fragestellung auch für Untersuchungen an „Plasma“-Beschleunigern von Interesse sein. In einem geschlossenen Vierpoltorus sind die zusätzlichen Magnetfelder, die durch die unbehinderten Driftströme (Abschnitt I) verursacht werden, welche im wesentlichen aus vier paarweise entgegengesetzten Strömen in den Diagonalbereichen bestehen, zu berücksichtigen.

Beschickt man unser (in z -Richtung begrenztes) Vierpolfeld mit einem Isotopengemisch, so ist wegen der Massenabhängigkeit von η_0^* eine unterschiedliche Kompression der Partner zu erwarten, so daß insbesondere wegen der großen Diffusionsgeschwindigkeit Gl. (25) eine Isotopentrennung mit hohem Durchsatz erfolgreich sein dürfte. Dabei erhält man maximale Anreicherung der leichten Komponente im Zentrum und Anreicherung der schweren Komponente im Gebiet des steilen Abfalls der Ionendichte bei etwa $\eta \approx \frac{1}{3} \eta_0^*$.

Die Untersuchung dieser Methode sowie die Frage nach der Anwendbarkeit der Plasmakompression zum Aufbau einer intensitätsreichen Ionenquelle sind Gegenstand künftiger Experimente.

Die Arbeit wurde durchgeführt im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Braunschweig. Dem Direktor des Instituts Herrn Professor Dr. CARIO danke ich für zahlreiche Anregungen und Diskussionen sowie für die Mittel zur Durchführung der dieser Arbeit zugrundeliegenden Experimente. Mein Dank gebührt ebenfalls den Herrn Dr. A. LOHMAN, Dr. F. W. BRAUCKS und Dr. K. FRICKE für Diskussionen und den Herren Dipl.-Phys. U. WELLNER und cand. phys. H. ALBERTI für die Durchführung experimenteller Untersuchungen.